

Sobre la existencia de horizontes 4-dimensionales en relatividad general

H. A. DOTTORI *

IMAF - Observatorio Astronómico,
Córdoba, Argentina.

Abstract: In the case of a homogeneous and isotropic solution with spherical symmetry, the possibility of obtaining a metric in curvature coordinates (Synge 1971) with a null radial coordinate is analyzed. That means physically the existence of 4-dimensional horizon. It is shown that such a solution does not exist.

INTRODUCCION

El concepto intuitivo de horizonte en Relatividad General como "frontera entre los eventos detectables por un observador y aquellos que no lo son" fue formalizado por Rindler (1956) para modelos homogéneos e isotropos.

Como es ampliamente conocido, el elemento de línea para dichos modelos puede ser expresado siempre en la forma de Robertson-Walker (Robertson, 1935). Del concepto de horizonte antes señalado, se desprende que éste debe ser 3-dimensional, pero esta propiedad no resulta demostrada en la formalización ni es evidente en la misma. Nosotros construimos una métrica en coordenadas nulas (r, v, θ, φ) (donde r es además la distancia-luminosidad) cuya validez en un entorno 4-dimensional de $r_0, \pm \epsilon$, para una hipersuperficie nula 3-dimensional que cumpla las condiciones de horizonte $H(r_0, v, \theta, \varphi)$, haría extensible esta propiedad a todo abierto A que verifique

$$H \subset A \subset C [r_0 - \epsilon < r < r_0 + \epsilon, v, \theta, \varphi]$$

* Trabajo realizado en parte, mediante una beca del Instituto Alemán de Intercambio Cultural DAAD (Deutscher Akademischer Austauschdienst).

siendo C la clausura del conjunto (De Witt, 1963). Esto implicaría la existencia de un horizonte 4-dimensional.

1 — LA METRICA

Si tratamos problemas con simetría esférica, homogéneos e isotropos, la expresión más general de la métrica aplicable es la de Robertson-Walker (1935), que en coordenadas gaussianas (comoviles) se escribe:

$$(1) \quad ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau) \left\{ \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2}{\left(1 + \frac{k\rho^2}{4}\right)} \right\}$$

$t =$ tiempo cósmico

$k =$ constante de curvatura espacial

$c = 1$ (vel. de la luz)

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2$$

Si dejamos ρ y τ constantes, el bi-espacio resultante tiene curvatura gaussiana constante en virtud de la simetría esférica. Si definimos una nueva coordenada radial;

$$(2) \quad r = \frac{R\rho}{\left(1 + \frac{k\rho^2}{4}\right)}$$

la curvatura gaussiana del bi-espacio (θ, φ) es $1/r^2$ y la métrica sobre éste

$$(3) \quad ds^2_{(\theta, \varphi)} = r^2 d\Omega^2$$

Si suponemos que las curvas $r =$ constante son geodésicas nulas (rayos de luz), podemos introducir una segunda coordenada nula v y expresar (1) en la siguiente forma:

$$(4) \quad ds^2 = r^2(-d\Omega^2 + e^{2k} dr dv), \quad K = K(r, v), \quad (\text{fig. 1})$$

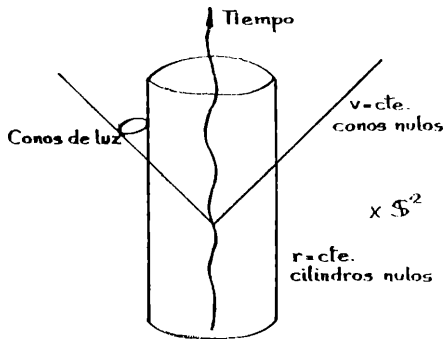


Fig. 1 — Representación del sistema de coordenadas nulas (r, v, θ, φ) . El subespacio (θ, φ) está representado por la esfera S^2 .

Para todo modelo con horizonte, de existir la transformación de (1) a (4), por simetría esférica el horizonte debe tener coordenada $r = r_H = \text{constante}$. Si la suposición anterior es cierta, cada hiperesfera con radio $r_H - \epsilon < r < r_H + \epsilon$ tiene la característica de horizonte y de su unión resulta un subespacio 4-dimensional del espacio-tiempo con propiedades de horizonte.

2 — ANALISIS DE LA METRICA

Adoptamos para este análisis un punto de vista estrictamente físico. Puesto que tenemos las componentes del tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, ya que postulamos la forma (4) para el elemento de línea, podemos calcular el tensor de Einstein $G_{\alpha\beta}$. Una vez en posesión de G podemos relacionarlo con el tensor de energía-materia $T_{\alpha\beta}$, resultante de las condiciones físicas en que se encuadra el problema, mediante las ecuaciones de Einstein.

$$(5) \quad G_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta}$$

Adoptamos para la materia la aproximación del fluido ideal por dos razones: 1) Porque la forma de T es conocida y relativamente fácil de tratar; 2) Porque es el caso límite de fluidos que presentan otras características tales como viscosidad, etc.

2-1. Componentes del tensor de Einstein. Las componentes covariantes del tensor fundamental son:

$$(6) \quad g_{\theta\theta} = -r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2\theta, \\ g_{rv} = r^2 e^{2K}$$

y las del tensor de Einstein;

$$G_{rr} = \frac{4}{r^2} + \frac{4\kappa_{,r}}{r}, \\ G_{\theta\theta} = 4e^{-2K} \kappa_{,rv} \quad (*) \\ (7) \quad G_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta G_{\theta\theta}, \\ G_{rv} = -\frac{1}{2} e^{2K} \\ G_{\alpha\beta} = 0 \text{ en los otros casos.}$$

La forma co-contravariante de este tensor es:

$$(8) \quad G^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} G^{\theta}_{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G^{\theta}_{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & G^v_r & -1/r^2 \end{bmatrix}$$

Una primera observación del tensor G nos muestra que no puede haber solución vacía (puesto que no todas las componentes se anulan) ni tampoco la solución de

“polvo”, $p = 0$, ya que G^{θ}_{θ} y $G^{\varphi}_{\varphi} \neq 0$.

Analicemos ahora el caso de un fluido ideal, que incluye los dos casos anteriores, cuyo tensor de energía es:

$$(9) \quad T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^{\mu} u^{\nu} - g^{\mu\nu} p$$

ρ = densidad, p = presión, u = cuadrivector velocidad

$$g_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu} = 1$$

Sus componentes co-contravariantes son:

$$(10-a) \quad T^{\theta}_{\theta} = T^{\varphi}_{\varphi} = -p$$

$$(10-d) \quad T^{rv} = (\rho + p) g_{rv} u^r u^r$$

(*) Las comas indican derivadas.

$$(10-b) \quad T^r_r = (\rho + p) g_{rv} u^r u^v - p$$

$$(10-c) \quad T^v_v = (\rho + p) g_{vr} u^v u^r - p$$

$$(10-f) \quad T^v_r = (\rho + p) g_{rv} u^v u^r$$

donde $g_{rv} u^r u^v = g_{vr} u^v u^r = 1/2$ por definición del 4-vector velocidad. De donde obtenemos para T^r_r y T^v_v

$$(10-b-d) \quad T^r_r = T^v_v = \frac{\rho - p}{2}$$

En (10-d) y (10-f) es necesario notar que

$$g_{vr} u^r = u_v, \quad g_{rv} u^v = u_r, \quad \text{y} \quad u^r u^v = g^{rv}$$

Las ecuaciones de Einstein (5) y la expresión (8) para G exigen que $T^r_r = 0$; esta condición sólo puede verificarse si U^r o U_v se anulan, pero ninguna de ambas puede hacerlo ya que por (11) ello significaría la anulación automática de la otra lo que es incompatible con la definición del vector velocidad.

En consecuencia esto contradice la hipótesis de partida, que es suponer la existencia de la forma (4) para una métrica con simetría esférica, y por lo tanto la posibilidad de existencia de un horizonte 4-dimensional.

AGRADECIMIENTOS

Al Instituto Max-Planck de Alemania por su hospitalidad. Al Dr. J. Ehlers por las diversas sugerencias y discusiones sobre el tema.

REFERENCIAS

- Gürsey, F.: *Relativity, Group and Topology*. Editores De Witt, C. y De Witt, B. (Gordon and Breach), 1963. Estos conceptos se pueden ver también en cualquier libro de teoría de conjuntos.
- McVittie, G. C.; 1956, *General Relativity and Cosmology* (Chapman and Hall LTD). pág. 60.
- Rindler, W.; 1956, *Visual horizons in world-models*, M.N.R.A.S. 116, N° 6, 662.
- Robertson, H. P.; 1935, *Ap. J.* 82, 284.
- Synge, J. L.; 1971, *Relativity the General Theory* (North Holland Publ. Co.) 4ª edición, pág. 267.

A re-analysis of τ Ursae Majoris

Z. LÓPEZ GARCÍA

Observatorio Astronómico, La Plata y CONICET, Buenos Aires, Argentina.

Resumen: Se realiza un nuevo análisis de las estrellas Am τ U Ma utilizando nuevas determinaciones de su temperatura efectiva y gravedad superficial y nuevas medidas de anchos equivalentes e identificaciones de líneas.

Con el método de las curvas de crecimiento se calculan las abundancias de elementos. Se investiga la existencia de ciertos elementos pesados encontrados en las estrellas Ap más frías, especialmente aquellos con Z entre 41 y 55 pero no existe evidencia de ellos. Lo mismo sucede con los elementos más pesados de la tabla periódica.

Introduction

τ U Ma was the first Am star for which a detailed atmospheric analysis was made (Greenstein, 1948; Miczaika et al, 1956). It was studied together with several F stars using equivalent widths and a relative curve of growth method. Greenstein used however an ionization temperature which was too low and he obtained thus a low effective gravity. Subsequent studies of Am stars utilizing model atmospheres have shown however normal gravities (onti, 1965, van't Veer-Monneret, 1963, Provost and van't Veer-Menneret, 1969; Praderie, 1967). Therefore it was thought that a re-analysis of τ U Ma was in time.

Measurements

The measurement of equivalent widths in the range 4000-4860 Å was made upon the microphotometric register of the plates used by Greenstein in his work and loaned generously by him to Dr. C. Jaschek (original dispersion: 2.8 Å/mm at $H\gamma$).

Since Greenstein used only the lines common to all his F stars, a new measurement and identification of all lines was made. An equivalent width-central depth relation was established using the value of the equivalent widths measured by Greenstein; those of the remaining lines were obtained from this relation. The line identification was made using conventional methods. Although a large quantity of lines are affected by strong blends, for the construction of the curves of growth only lines which seemed unblended or very little affected by other contributors were chosen.